Сергей ИВЛИЕВ,
руководитель, Prognoz Risk Lab, к.э.н.

Говоря о срочной структуре процентных ставок, обычно имеют в виду зависимость процентной ставки от времени. Эту зависимость также называют бескупонной кривой доходности — zero coupon yield curve. Существует многообразие методов моделирования бескупонной кривой доходности. Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки.

Моделирование срочной структуры процентных ставок российского рынка

Виктор ЛАПШИН,
научный сотрудник,
FERM Lab НИУ-ВШЭ,
к.ф.-м.н.

Срочная структура процентных ставок отражает желание рынка давать в долг или принимать средства на определенный срок под те или иные проценты. Однако на различных рынках эта структура неодинакова. Ситуацию осложняет тот факт, что различные рынки могут существовать в пределах одной физической биржи. Рынки облигаций и краткосрочных заимствований — разные по своей сути, и следует с большой осторожностью подходить к использованию данных с них для определения срочной структуры процентных ставок. Так, например, при прочих равных цена облигации будет выше (то есть будет подразумевать меньшую доходность вложений на данный срок), так как обладание облигацией несет дополнительные преимущества. Так, владелец облигации может оставить ее в залог, осуществить сделку РЕПО и так далее. Помимо этого, на цены (а следовательно, и на процентные ставки) непосредственно влияют такие параметры, как кредитное качество и ликвидность.

Бескупонная кривая доходности, определенная на государственных облигациях или инструментах, не содержащих кредитный риск, называется безрисковой (risk-free) и применяется в качестве бенчмарка срочной структуры процентных ставок центральными банками и надзорными органами различных стран (BIS, 2005).

ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОБЛИГАЦИЙ

Рассмотрим базовые модели ценообразования облигаций на основе бескупонной кривой доходности. Бескупонную кривую доходности спот будем обозначать $r(t)$.

Под облигацией понимается обращающееся на вторичном рынке обязательство, расписание платежей по которому заранее известно (то есть мы рассматриваем облигации с фиксированным купоном и без встроенных опционов). Эти платежи могут быть как процентами, так и частичным или полным погашением основного долга.

Для простоты мы будем рассматривать группу облигаций одного кредитного качества (например, выпущенные одним эмитентом) и примерно одной ликвидности.

Коэффициенты дисконтирования и процентные ставки связаны между собой монотонной функцией, определяемой в зависимости от способа начисления процентов (конвенции).

Временная структура процентных ставок характеризуется кривой мгновенных форвардных процентных ставок $f(t)$. Это, в некотором смысле, «плотность начисления процентов». Она связана с функцией дисконтирования $d(t)$ и кривой процентных ставок $r(t)$ следующими соотношениями:

$$r(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds, \quad d(t) = e^{-\int_0^t f(s)ds}$$

Чтобы использовать котировки облигаций для определения срочной струк-

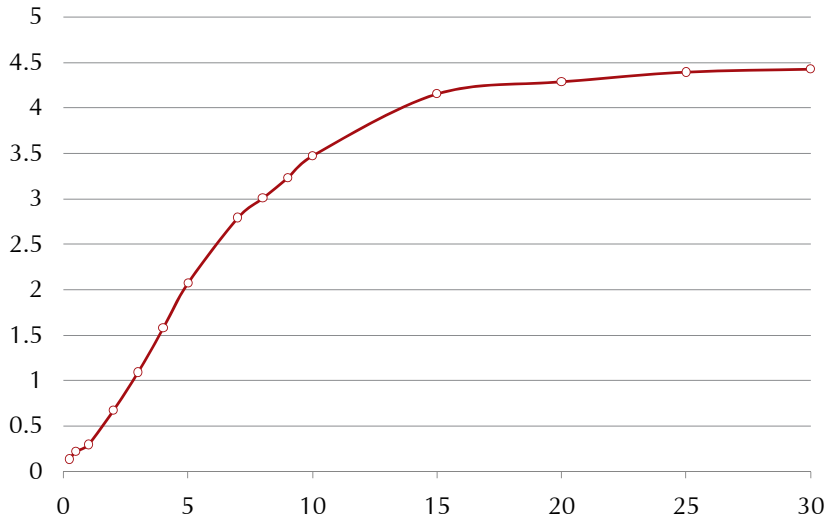


Рисунок 1
Пример бескупонной кривой доходности US Treasuries, r(t)

туры процентных ставок, необходимо определить связь между этими объектами. Рассмотрим бескупонную облигацию номиналом 1 со сроком до погашения t. Бескупонная облигация — это та, по которой будет проведена всего одна выплата. Пусть эта выплата имеет размер 1 и произойдет через время t. Предположим также, что облигация является безрисковой, то есть отсутствуют кредитные риски (риски неуплаты), риски ликвидности (невозможности продать бумагу) и другие. Тогда ее текущая стоимость будет равна d(t). Кривая доходности, соответствующая функции дисконтирования

$$r(x) = -\frac{1}{t}\ln d(t),$$

будет безрисковой.

Если у нас теперь есть реальная бескупонная облигация, ее цена будет ниже, чтобы компенсировать возможные риски, а бескупонная кривая доходности, построенная по таким облигациям, будет лежать выше безрисковой бескупонной кривой доходности. Тем не менее, для оценки финансовых инструментов, схожих с данной облигацией по кредитному качеству и ликвидности, скорее подойдет именно эта кривая, а не безрисковая.

Если облигация купонная, то есть по ней имеются периодические выплаты процентов (купонов), или амортизационная, то есть основной долг выплачивается по частям, то потоков платежей будет больше. Пусть имеется n потоков платежей во времена $\tau_1,\ldots,\tau_n$ размерами $F_1,\ldots,F_n$ соответственно. Логично предположить[1], что стоимость такой облигации будет равна стоимости портфеля (набора) из n бескупонных облигаций со сроками до погашения $\tau_1,\ldots,\tau_n$ и номиналами $F_1,\ldots,F_n$ соответственно. В таком случае стоимость P купонной облигации будет определяться соотношением

$$P = \sum_{s=1}^{n} F_s d(\tau_s). \quad (1)$$

Рассмотрим пример. График бескупонной кривой доходности US Treasuries приведен на Рисунке 1.

Соответствующие значения функции дисконтирования могут быть рассчитаны на основе уравнения d(t)=exp(-r(t)t) и будут иметь вид, представленный на Рисунке 2.

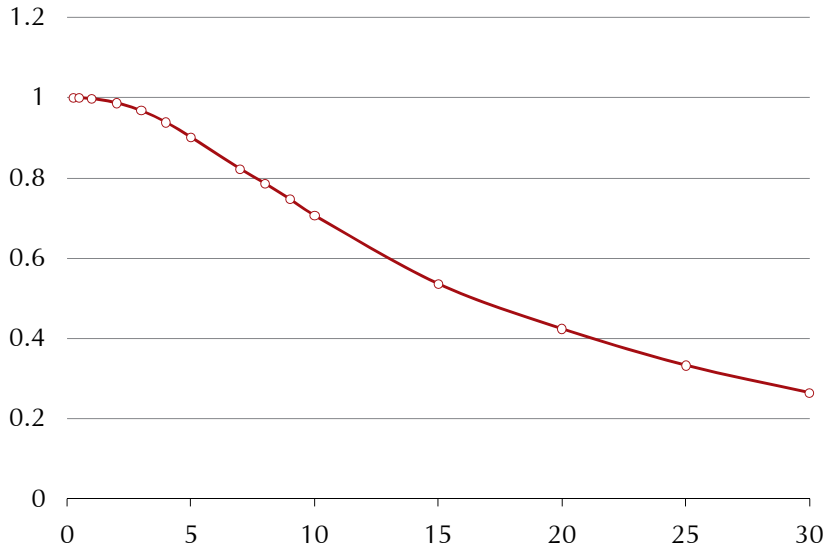
Используем найденную функцию дисконтирования, чтобы определить теоретическую цену гипотетической безрисковой долларовой облигации с купонными выплатами в 10% каждый год и сроком до погашения три года.

$$P=10d(1)+10d(2)+110\cdot d(3)=10\cdot 0.997+10\cdot 0.9865+110\cdot 0.9676=126.27(\%)$$

Заметим, что полученная цена является грязной (gross), то есть включает в себя накопленный купонный доход (НКД).

В реальности на ценообразование очень сильное влияние оказывают вопросы кредитного качества, ликвидности, налогообложения. Учет кредитного качества облигации возможен с использованием кредитных спредов. Ликвидность

Рисунок 2
Пример функции дисконтирования US Treasuries, d(t)



[1] Это стандартное предположение, и обсуждение его правдоподобности выходит за рамки данной методики. Укажем лишь, что владение портфелем бескупонных облигаций дает больше возможностей, нежели владение одной купонной облигацией: так, портфель можно продать частями, а купонную облигацию только целиком. К тому же, купонные платежи и погашение основного долга могут по-разному облагаться налогом.

же и налогообложение обычно не рассматриваются ввиду отсутствия на сегодняшний день адекватного их описания (как математического, так и экономического).

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ

Для определения кривой доходности у нас имеется «моментальный снимок» рынка. Это набор описаний облигаций (моментов и объемов обещанных платежей) и их текущих рыночных цен.

На самом деле, на рынке нет «цены облигации» как таковой. Вместо этого участнику рынка доступно несколько показателей, в том числе:

- Цена продавца (ask price) — это наименьшая цена, по которой выставлена заявка на продажу, то есть цена, по которой бумагу можно немедленно купить. Объем этой заявки — отдельный вопрос: вполне возможно, что для покупки интересующего нас количества облигаций необходимо заплатить больше, так как по указанной цене может продаваться лишь малый объем, а остальное придется докупать по более высоким ценам.
- Цена покупателя (bid price) — это наибольшая цена, по которой выставлена заявка на покупку.
- Цена последней сделки (last price) — это цена, по которой была проведена последняя сделка с этой бумагой.

Если доступны данные с периодичностью лишь раз в день, то эти цифры рассчитываются биржей на конец торгового дня по специальному алгоритму. В таком случае также доступны статистические величины: среднее, минимальное и максимальное значения цены.

Для построения модели предполагается, что доступны следующие данные:

- Количество наблюдаемых облигаций N. Отдельные облигации будут обозначаться индексом k=1,...,N.
- Моменты обещанных выплат, общие для всех облигаций: τ_s,s=1,...,n. В случае если моменты выплат по различным облигациям не совпадают, дополнительно вводится нулевая выплата в нужный момент.
- Обещанные объемы выплат (возможно, нулевые) по k-й облигации в s-й момент времени: $F_{s,k}$,s=1,...,n,k=1,...,N.
- Цены облигаций P_k,k=1,...,N, взятые до вычета накопленного купонного дохода.
- Котировки на покупку и на продажу: b_k,a_k,k=1,...,N.

Мы предполагаем, что наблюдаемые цены P_k не точно отражают текущую приведенную стоимость потоков платежей по облигации, но отличаются от истинного значения приведенной стоимости на некоторую случайную величину (ошибку, шум). Эта величина, очевидно, является характеристикой ликвидности рассматриваемой бумаги, так как чем меньше ликвидность, тем больше отличается цена, по которой удается совершить сделку, от справедливой оценки приведенной стоимости.

Из показателей ликвидности нам доступен, как правило, лишь bid-ask спред, характеризующий как разброс возможных цен сделки. Довольно естественно, что цена сделки может свободно и случайно колебаться как в пределах bid-ask спреда, так и в разумной степени за его пределами. Логично было бы требовать, чтобы вычисленная кривая доходности давала расчетные цены для рассматриваемых облигаций, близкие (в среднеквадратическом смысле) к наблюдаемым с учетом bid-ask спреда.

Таким образом, условие приближения наблюдаемых на рынке цен облигаций можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{w_k^2}\left(P_k-\tilde{P}_k\right)^2\xrightarrow[r(.)]{}\min. \qquad (2)$$

где P_k — наблюдаемая цена k-й облигации,
$\tilde{P}_k$ – расчетная цена,

$$\tilde{P}_k=\sum_{s=1}^{n}F_{s,k}d(\tau_s)=\sum_{s=1}^{n}F_{s,k}\exp(-r(\tau_s)\cdot\tau_s) \quad ,$$

w_k — вес, характеризующий разброс цен k-й облигации, например

$$w_k=\frac{a_k-b_k}{2} \ .$$

В общем случае задача (2) является некорректно поставленной в силу того, что количество неизвестных процентных ставок $r(\tau_s)$ в моменты τ_s,s=1,...,n значительно превосходит количество наблюдаемых цен P_k,k=1,...,N.

Для уменьшения размерности задачи часто выбирается то или иное параметрическое семейство для мгновенных форвардных ставок f(.) и, соответственно, для спот-ставок r(.). Одной из наиболее популярных является параметризация, предложенная в работе Нельсона–Зигеля.

Параметрическая форма Нельсона-Зигеля для мгновенных форвардных ставок имеет следующий вид:

$$f(t)=\beta_0+\left(\beta_1+\beta_2\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad ,$$

соответствующая форма спот-ставок будет иметь вид:

$$r(t)=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)\frac{\tau}{t}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]-\beta_2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \ .$$

В качестве дальнейшего развития модели в 1995 году в работе Свенссона была предложена модификация параметрической формы Нельсона-Зигеля:

$$f(t)=\beta_0+\left(\beta_1+\beta_2\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+\beta_3\frac{t}{\tau_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \ .$$

Данная параметризация за счет добавления еще одной компоненты, отвечающей за кривизну, позволяет более эффективно описать долгосрочные ставки. Относительная простота функциональной формы Нельсона-Зигеля и Свенссона и способность моделей описывать различные формы срочной структуры ставок стали причиной высокой популярности моделей как среди регуляторов (BIS, 2005), так и в профессиональной среде.

В Российской Федерации срочная структура процентных ставок рассчитывается на основе G-кривой, которая является модификацией Нельсона-Зигеля, полученной за счет добавления трех корректирующих членов для более точного описания начального участка кривой (Гамбаров и др., 2006):

$$r(t)=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)\frac{\tau}{t}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]-\beta_2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+$$
$$+g_1\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)+g_2\exp\left(-\frac{(t-1)^2}{2}\right)+g_3\exp\left(-\frac{(t-2)^2}{2}\right).$$

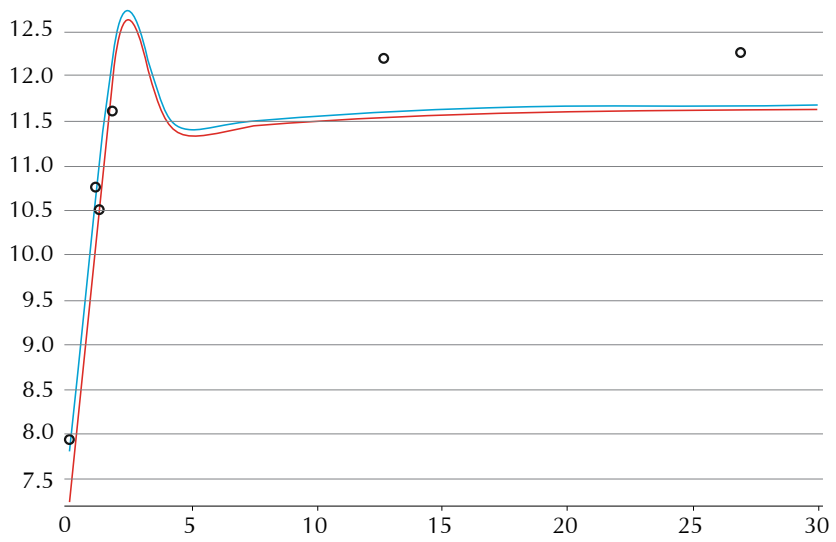


Рисунок 3
Пример артефактов параметрической формы G-кривой на 18.03.2009

G-кривая в режиме реального времени рассчитывается ММВБ и ежедневно публикуется на сайте Банка России[1].

К достоинствам G-кривой можно отнести возможность пересчета в режиме реального времени и признание регулятором, что позволяет считать ее бенчмарком временной структуры в России.

Основным недостатком, по нашему мнению, является выбор параметрической формы, который может приводить к артефактам при описании начального участка кривой в области сроков от одного до трех лет, вызванным использованием корректирующих членов.

На Рисунке 3 приведены графики G-кривой[2] за 18.03.2009 и 17.03.2009. Точками на графике обозначены фактические доходности выпусков ОФЗ, торговавшихся 18.03.2009.

К недостаткам всех перечисленных методов можно также отнести и то, что они не гарантируют отсутствие арбитражных возможностей и выполнение принципа предпочтения ликвидности. Это может приводить к тому, что использование этих кривых при ценообразовании облигаций или, что еще более вероятно, производных финансовых инструментов может привести к существенным погрешностям.

«МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ SES ПОЗВОЛЯЕТ ГАРАНТИРОВАТЬ ВЫПОЛНЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРИНЦИПОВ ПРЕДПОЧТЕНИЯ ЛИКВИДНОСТИ И ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ, А ТАКЖЕ ОБЕСПЕЧИТЬ НАИЛУЧШУЮ ГЛАДКОСТЬ КРИВОЙ И ТОЧНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕНЫ»

МЕТОД SES ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ

Рассмотрим метод моделирования кривой доходности, который позволяет гарантировать выполнение экономических принципов предпочтения ликвидности и отсутствия арбитражных возможностей, а также обеспечить наилучшую гладкость кривой и точность приближения цены.

Результирующая кривая доходности будет экономически осмысленной, если соответствующая ей функция дисконтирования будет невозрастающей функцией от срока. Это равносильно неотрицательности мгновенных форвардных процентных ставок.

Мы также предположим, что кривая процентных ставок обладает в некотором смысле максимальной гладкостью. Это позволит нам получать приятные глазу и реалистичные кривые доходности. Математически это условие может выражаться многими разными способами, можно выбрать любой из них.

Заметим, что требования качества приближения и гладкости, по сути, представляют собой противоречащие друг другу цели: чем точнее кривая отражает наблюдаемые цены, тем более причудливую форму ей приходится принимать, чтобы отразить в том числе и случайные компоненты цен. Очевидно, что нужен разумный компромисс между качеством приближения и гладкостью кривой. Мы введем специальный параметр α, который будет отражать относительный вес критерия гладкости в сравнении с критерием точности. Чем больше α, тем более гладкую кривую мы хотим получить (возможно, в ущерб точности).

Выбор параметра α (его называют параметром регуляризации) соответствует фиксированию наших предпочтений в плане баланса качества приближения цен и визуальной привлекательности кривой. Стоит отметить, что гладкая кривая, помимо визуальной привлекательности, более реалистична, так как предпочтения и настроения инвесторов на рынке непрерывно зависят от срока до погашения, что означает малую изменчивость мгновенной форвардной процентной ставки $f(t)$, что, в свою очередь, дает необходимую гладкость.

Возможность аналитического решения подобной задачи впервые показана в работе Смирнова и Захарова. Полученная кривая представляет собой кусочно-заданную функцию, состоящую из синусоидальных и экспоненциальных сплайнов, что дало на-

[1] http://www.cbr.ru/GCurve/Curve.asp.

[2] http://www.micex.ru/marketdata/indices/state/yieldcurve/chart.

РЫНКИ ОБЛИГАЦИЙ И КРАТКОСРОЧНЫХ ЗАИМСТВОВАНИЙ — РАЗНЫЕ ПО СВОЕЙ СУТИ, И СЛЕДУЕТ С БОЛЬШОЙ ОСТОРОЖНОСТЬЮ ПОДХОДИТЬ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ДАННЫХ С НИХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРОЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

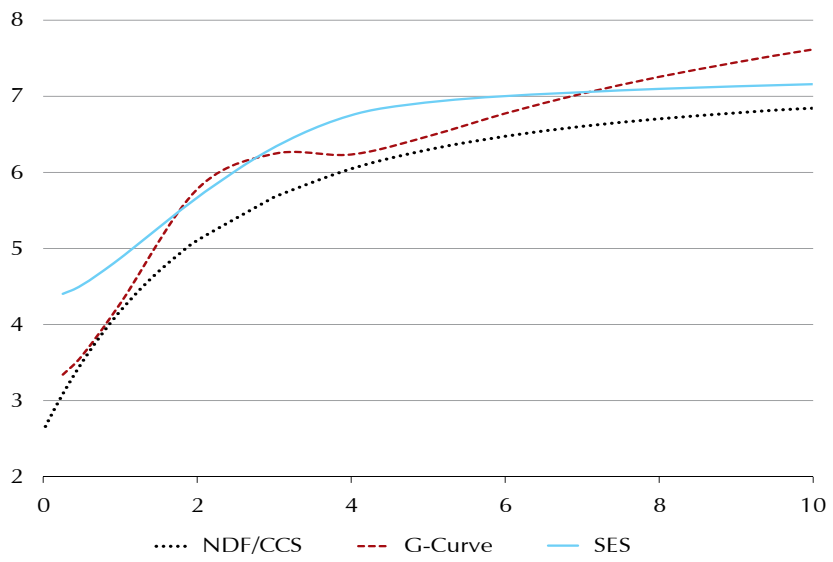


Рисунок 4
Сравнение различных кривых доходности в рублях на 01.07.2010

звание методу — SES (сокращение от Sinusoidal-Exponential Splines).

Математическое решение задачи основывается на аппарате оптимального управления и принципа максимума Понтрягина, изложенного в публикации Тихонова 1979 года. С выводом можно ознакомиться в работе Лапшина. Оптимальная структура мгновенных форвардных процентных ставок представляет собой сплайн некоторого специального вида:

$$f(t) = \left(p_{s-1}\phi_{\lambda_s}(\tau_s - t) + p_s\phi_{\lambda_s}(t - \tau_{s-1})\right)^2, \quad t \in [\tau_{s-1}, \tau_s), \qquad (3)$$

где

$$\phi_{\lambda_s}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda_s}\,t}{\sinh\sqrt{\lambda_s}(\tau_s - \tau_{s-1})}, & \lambda_s > 0, \\ \dfrac{\sin\sqrt{-\lambda_s}\,t}{\sin\sqrt{-\lambda_s}(\tau_s - \tau_{s-1})}, & \lambda_s < 0, \\ \dfrac{t}{\tau_s - \tau_{s-1}}, & \lambda_s = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Таким образом, определение кривой доходности сводится к нахождению коэффициентов p_s,s=0,...,n и λ_s,s=1,...,n по наблюдаемым данным. Также может быть показано, что наборы λ_s,s=1,...,n и p_s,s=0,...,n не могут быть произвольными. Функция f(t), определяемая (3), должна быть непрерывно дифференцируемой в узлах склейки τ_s,s=1,...,n, а числа λ_s должны удовлетворять некоторому условию, которое не приводится здесь в силу своей громоздкости.

Сам непосредственный поиск численных значений неизвестных коэффициентов осуществляется любым методом нелинейной оптимизации.

Полученная кривая устроена таким образом, чтобы гарантировать экономическую состоятельность и наилучшую гладкость при заданной точности.

На Рисунке 4 показана кривая доходности, вычисленная на 1 июля 2010 года рассматриваемым методом, G-кривая, рассчитанная ММВБ на ту же дату, и кривая, полученная на основе сглаживания котировок NDF (non-deliveribale forwards) и CCS (cross currency swaps), которая также является бенчмарком безрискового уровня ставок в рублях.

Точность приближения указанных кривых можно оценить, рассчитывая среднее расхождение фактических цен всех ОФЗ и модельных цен.

В целом в рассматриваемом периоде метод SES дает более точную оценку (в среднем 0.59% от номинала) по сравнению с G-кривой (0.9% от номинала) и NDF/CCS (1.47% от номинала).

Для того чтобы ответить на вопрос, какой метод построения бескупонной кривой выбрать, необходимо предварительно определиться, для каких задач планируется использовать кривую. Так, например, требуемая точность существенно будет различаться в задачах управления процентным риском, ценообразовании облигаций и ценообразовании производных финансовых контрактов.

Описанный нами метод SES является на данный момент одним из наиболее мощных методов моделирования, позволяющих получать более высокую точность по сравнению с аналогами, гарантировать неотрицательность мгновенных форвардных процентных ставок и при этом иметь наилучшую гладкость.

ВЫБИРАЯ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ БЕСКУПОННОЙ КРИВОЙ, НЕОБХОДИМО ОПРЕДЕЛИТЬСЯ, ДЛЯ КАКИХ ЗАДАЧ ПЛАНИРУЕТСЯ ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАТЬ. ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ БУДЕТ СУЩЕСТВЕННО РАЗЛИЧАТЬСЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕНТНЫМ РИСКОМ, ЦЕНООБРАЗОВАНИИ ОБЛИГАЦИЙ И ЦЕНООБРАЗОВАНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ КОНТРАКТОВ