Максим БУЕВ,
профессор прикладных финансов,
Европейский университет
в Санкт–Петербурге

Как тропическая геометрия пришла на помощь Банку Англии

Ранним зимним утром 2000 года студенты экономической магистратуры Оксфорда спешили на очередную лекцию по теории аукционов. В тот день у вашего покорного слуги был день рождения, чем он тогда и воспользовался, посчитав это достаточно весомой причиной для прогула занятий. Как оказалось, зря...

СЕНТЯБРЬ 2007 ГОДА ОЗНАМЕНОВАЛСЯ ПАНИКОЙ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ ВЕЛИКОБРИТАНИИ И «НАБЕГОМ» (BANK RUN) НА БАНК NORTHERN ROCK

Теорию аукционов нам читал Пол Клемперер — английский представитель старейшей немецкой фамильной династии, профессор и академик, известный своими работами по теории отраслевых рынков, выработке политик по поддержанию конкурентности, теории аукционов, экономике изменения климата и другими. На том занятии Клемперер традиционно проводил один нетривиальный аукцион — и профессор, и студенты делали ставки и опускали деньги в стеклянную банку. Призом победителю служила сама банка с деньгами, а победителем становился тот, чей день рождения был наиболее близок к дате проведения аукциона. Не стоит объяснять, что, пропустив лекцию, я упустил стопроцентный шанс поправить свой нехитрый студенческий бюджет!

Каких-то семь лет спустя осенним утром Клемперер все так же занимался распределением денег в банке. На этот раз, однако, ставки были совсем другими. Сентябрь 2007 года ознаменовался паникой на финансовом рынке Великобритании и «набегом» (bank run) на банк Northern Rock. Чтобы предотвратить эскалацию панических настроений и возможный коллапс банковской системы, Центральному банку страны нужно было срочно создать механизм распределения ликвидности среди коммерческих банков и строительных сберегательных касс. На эту цель отвели 100 млрд фунтов. При ссуживании денег ЦБ был готов принимать в залог более рискованные ценные бумаги, чем обычные гособлигации (gilts), но при этом собирался выдавать кредиты под более высокий процент. Иными словами, Банк Англии готов был предложить банкам два альтернативных продукта — кредит с низкой ставкой, но требующий безрискового залога, и кредит с высокой ставкой, залогом по которому могли служить более рискованные ценные бумаги. Перед Банком стояла реальная проблема — сколько кредитов каждого типа выдавать и какие процентные ставки назначать. Руководство ЦБ с рвением принялось за решение этой задачи и провело несколько аукционов ликвидности. Все они оказались неудачными. Тогда Мервин Кинг, в то время глава Банка Англии, позвонил Клемперу...

Проблема распределения, стоявшая перед Банком Англии, на самом деле была

классической проблемой организации аукциона по похожим, но неидентичным продуктам. Теория аукционов гласит, что при определенных условиях в таких случаях лучше организовать один мультираундовый аукцион, где все продукты продавались бы одновременно, чем серию параллельных мультираундовых аукционов для каждого типа продуктов. И в том и в другом случае получающиеся в итоге равновесные цены почти идентичны. Однако выгоден именно единый аукцион, поскольку он позволяет аукционисту лучше выразить свои предпочтения по распределению продуктов между претендентами, и вдобавок он более устойчив перед возможным сговором претендентов или в случае их хищнического поведения. Кроме того, намного быстрее провести один аукцион, чем несколько.

Клемперер занимался такими аукционами уже тогда, когда разыгрывал со своими студентами банку с деньгами. В марте-апреле 2000 года вместе с Кеном Бинмором, математиком, экономистом и профессором Университетского колледжа в Лондоне, он помог британскому правительству организовать аукцион по распределению пяти лицензий на частоты мобильной связи третьего поколения 3G. В результате аукциона правительство выручило 22.5 млрд фунтов, что составило 2.5% от ВНП. Это был величайший на тот момент аукцион в истории, или, как писали авторы, со времени продажи Преторианской гвардией римского императорского престола Юлиану Дидию в 195 году н. э.

Из-за сложности многоэтапного процесса и его организации телеком-аукционирование заняло 7 недель. В случае же с аукционированием кредита размерность задачи была еще больше, так как Банк Англии собирался принять огромное количество ставок от большого числа различных банков. Затем предстояло совместить ставки-банки в оптимальные пары и найти одно агрегированное решение. В ситуации, когда все обеспокоены возможной паникой и набегами на нуждающиеся банки, счет идет на секунды, а не на недели. Возник логичный вопрос — как сжать процесс представления заявок на кредиты под залог различных финансовых активов и процесс определения оптимальной ставки по таким кредитам в короткий промежуток времени?

К счастью, Клемперер достаточно быстро нашел решение. Надо, решил он, попросить банки, делающие ставки, рассказать что-то о своих предпочтениях. Если инженер процесса будет знать о предпочтениях банков достаточно много, то он сможет разработать эффективную процедуру многораундового аукциона. Тогда можно будет встроить предпочтения банков в компьютерную программу, описывающую систему представления ставок и распределения кредитов. Затем можно сымитировать развитие ситуации так, что программа покажет инженеру, что могло бы получиться, если бы аукцион проводился как 7-недельный процесс.

Вопрос, однако, состоял в том, как вытянуть из банков сведения об их предпочтениях. Это было похоже на решение следующей задачи. Представьте, что у вас есть миска с различными фруктами — апельсинами, бананами, яблоками, виноградом и грейпфрутами. Вам надо распределить фрукты наиболее эффективным образом между различными людьми, учитывая их предпочтения, которые вы слабо знаете. Сделать это нужно в рамках одного процесса, таким образом сравнивая пять различных типов фруктов. Иными словами, с одной стороны, фрукт — он и в Африке фрукт, а с другой — надо работать в пяти различных измерениях, чтобы оптимально отразить компромиссы (tradeoffs) в предпочтениях между пятью различными вещами.

Вопросы, которые в этом случае нужно задавать банкам, будут примерно следующими: «Сколько винограда для вас стоит одно яблоко?» Или: «Предпочтете ли вы только один апельсин, или все же для вас лучше получить два апельсина в паре, если вы выиграете любой из них, поскольку у вас есть два ребенка, и если вы принесете домой разные фрукты, то дети будут драться?»

На практике такие предпочтения можно представить в виде математических графов, то есть совокупности непустого множества вершин и связей между ними. Далее надо работать с этими графами. Клемперер, который серьезно увлекался геометрией с шестнадцатилетнего возраста, обнаружил, что эта наука исключительно полезна для решения многих задач размещения ресурсов, в частности проблем, подобных той, что стояла перед Банком Англии или заботит дельцов с миской фруктов. В частности, вместе с аспиранткой факультета экономики Оксфорда Элизабет Болдуин, уже защитившей докторскую диссертацию по математике, Клемперер

ТРОПИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — ЭТО ОБЛАСТЬ МАТЕМАТИКИ, СВЯЗАННАЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ, КОТОРАЯ СТАЛА АКТИВНО РАЗВИВАТЬСЯ ЛИШЬ 10–15 ЛЕТ НАЗАД

КЛЕМПЕРЕР И БОЛДУИН ВЫВЕЛИ ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОПИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ЭКОНОМИКЕ НА СОВЕРШЕННО НОВЫЙ УРОВЕНЬ

решил применить для решения проблемы распределения фруктов-кредитов так называемую тропическую геометрию.

Тропическая геометрия — это область математики, связанная с алгебраической и симплектической геометрией, которая стала активно развиваться лишь 10–15 лет назад. Эта наука манипулирует определенными кусочно-линейными объектами, которые выполняют роль классических алгебраических многообразий (например, поверхностей с особыми точками) в алгебраической геометрии. В силу этой вырожденной, кусочно-линейной природы основных объектов большинство классических математических проблем становится гораздо проще после их «тропиколизации». Это позволяет строить алгоритмы нахождения единственного решения «тропического» аналога задачи, тогда как прежде задача могла иметь множество решений.

Вначале эта наука возникла в информатике и название «тропическая» получила как дань бразильской школе — в частности, пионерским работам бразильского математика венгерского происхождения Имре Шимона. Однако существенный прорыв тропическая геометрия сделала благодаря россиянам: петербуржцу Григорию Михалкину, ныне работающему в университете штата Юта (США), открывшему ряд приложений теории в перечислительной алгебраической геометрии, а также москвичам Владимиру Данилову и Глебу Кошевому из Центрального экономико-математического института РАН, которые разработали некоторые экономические приложения теории.

Клемперер и Болдуин, однако, вывели приложения тропической геометрии в экономике на совершенно новый уровень. Начав в пяти измерениях и определив строгие правила, посредством которых они могли трансформировать графы предпочтений, в конце концов они поняли, как построить так называемый аукцион продуктовой смеси (product-mix auction), который позволил эффективно распределить фрукты из миски, или денежные средства Банка Англии.

Успех идеи был ошеломляющим. Вскоре после проведения аукционов на практике исполнительный директор Банка Англии отметил, что механизм распределения ликвидности был «Формулой 1» в мире центрального банкинга. По его словам, это был «потенциально значительный шаг вперед в практической выработке политик для поддержания финансовой стабильности». Более того, распределив с механизма 100 млрд фунтов, Мервин Кинг назвал результат «чудесным приложением теоретической экономики к практической проблеме, имеющей жизненно важное значение для финансовых рынков»!

Удивительно, но похожая история повторилась и в 2008 году, но уже по другую сторону океана. После краха банка Lehman Brothers в сентябре того года правительство США инициировало программу (TARP) покупки «токсичных» финансовых активов у проблемных американских банков. За $700 млрд Казначейство США собиралось выкупить 25 тыс. различных, но похожих финансовых продуктов, в основном ипотечных ценных бумаг класса subprime. Чтобы определить цену бумаг, то есть дисконт по отношению к их номиналу, нужно было придумать определенный механизм выкупа. К решению задачи Казначейство решило привлечь нескольких специалистов, и... у Клемперера снова зазвонил телефон.

Практическая полезность аукциона продуктовой смеси не исчерпывается рамками распределения ликвидности центральными банками. Министерство энергетики Великобритании уже звонило профессору Клемперу с просьбой оценить, можно ли улучшить некоторые процессы, которыми занимается министерство в вопросах лицензирования альтернативных видов топлива и их потенциального влияния на изменение климата. Вместе с тем, о каком бы практическом приложении мы ни говорили, для Клемперера вопрос всегда заключается в любви к процессу: он стремится понять силы, которые управляют событиями в реальности, чтобы затем привлечь всю силу и красоту математики для моделирования этих сил и управления ими на благо общества.

Прошедшим летом в июльском интервью британской газете Guardian Клемперер заявил, что было бы здорово, если бы правительство страны лучше понимало значение фундаментальных академических исследований, а также то, насколько бесценным может быть немедленное их применение в реальной жизни.

Как верны эти слова и для России! Тем более что в истории, о которой я вам поведал, фундаментальные исследования были в области математики, чьи экономические приложения развились именно благодаря существенному вкладу российской математической школы. Как жаль, что у нас нет своего Пола Клемперера! Наверное, не стоило прогуливать некоторые его лекции, а то — кто знает...